Ecuaciones Diferenciales (ED's)

Problemas de Valor de Frontera (PVF)

Coordenadas Cilíndricas en 1 Dimensión.

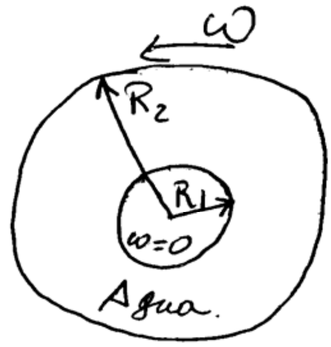
En el caso de coordenadas Radiales, aparece el Jacobiano para la Transformación del Sistema de coordenadas, por lo tanto, ya No se tendrá un término de la forma: $\frac{d^2u}{dx^2}$; Sino que aparecerá algo de la forma: $\frac{\partial}{\partial r}\left(f(r)\frac{\partial u}{\partial r}\right)$ en la Ecuación Diferencial, entonces, ya no se puede usar la Expresión de Diferencias Finitas para la Derivada de Segundo Orden Directamente a causa de la Presencia de $f(r)$. Tampoco se puede aplicar la Regla de la Cadena directamente porque la ED puede incluir Varios términos.

Entonces, para Resolver un PVF en coordenadas cilíndricas, es necesario hacer un Tratamiento Especial.

El truco principal de este tratamiento es la aplicación de un Cambio de Variable. Lo mejor es hacerlo con un Ejemplo:

Ejemplo:

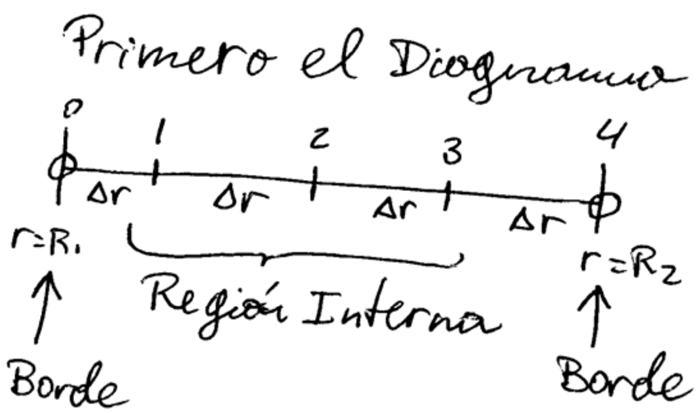
Se tiene agua Fluyendo entre Dos cilindros concéntricos, de radios $R_1 = 1cm$ y $R_2 = 3cm$. El cilindro interno está quieto, mientras que el externo gira a $\omega = 100$ rad/sg.. Con 3 Nodos Internos determine el perfil de Velocidades Tangenciales V_θ del agua. Los Ecuaciones son:



$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta)\right) = 0 \quad ; \text{ con: } \quad \begin{array}{l} r = R_1 : V_\theta = 0 \\ r = R_2 : V_\theta = \omega . R_2 \end{array}$$

Solución:

Primero el Diagrama Esquemático:



$$\Delta r = \frac{R_2 - R_1}{N-1} = \frac{3-1}{5-1} = \frac{1}{2}$$

$$\Delta r = 0{,}5 .$$

N: Nº Total de Nodos

Ahora Viene el Truco: Proponemos:

$$\frac{\partial}{\partial r}\Big(\underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta)}_{U}\Big) = 0 \Longrightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial r}(U) = 0}$$

(cambio de Variable)

Recordar que la ED es Válida solo para los puntos internos

Ahora el Problema se Redujo a: $\frac{dU}{dr} = 0$.

Debemos evaluar la ED para los Nodos Internos:

$\cdots \; i-1 \; \overset{\Delta r}{—} \; i \; \overset{\Delta r}{—} \; i+1 \; \cdots$

$$\left.\frac{dU}{dr}\right|_{r=r_i} = \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2\Delta r} = 0$$

Diferencias Finitas centradas derivada 1er Orden

Ahora escribimos para los tres nodos internos:

$i = 1$: 0 1 2 $\cdots$ $\quad \frac{U_2 - U_0}{2\Delta r} = 0 \Longrightarrow \boxed{-\frac{1}{2\Delta r}U_0 + \frac{1}{2\Delta r}U_2 = 0}$

$i = 2$: 1 2 3 $\cdots$ $\quad \frac{U_3 - U_1}{2\Delta r} = 0 \Longrightarrow \boxed{-\frac{1}{2\Delta r}U_1 + \frac{1}{2\Delta r}U_3 = 0}$

$i = 3$: $\cdots$ 2 3 4 $\quad \frac{U_4 - U_2}{2\Delta r} = 0 \Longrightarrow \boxed{-\frac{1}{2\Delta r}U_2 + \frac{1}{2\Delta r}U_4 = 0}$

Estas Tres son las Ecuaciones de los Nodos Internos

Ahora bien, estas ecuaciones están en función de U y la verdadera incognita es v_θ. Debemos Devolver el cambio de Variable, es decir, debemos determinar quienes son U_0, U_1, U_2, U_3, U_4.

Primero vamos con los Nodos Internos:

Recordemos que el cambio es: $U = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta)$.

Evaluando:

$$i=1: U_1 = \frac{1}{r_1} \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial r}(r \cdot v_\theta)\Big|_{r=r_1}}_{\text{Diferencias Finitos centradas.}} \Rightarrow U_1 = \frac{1}{r_1}\left(\frac{(r_2 \cdot v_{\theta_2}) - (r_0 \cdot v_{\theta_0})}{2\Delta r}\right)$$

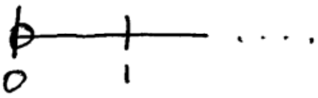
$$i=2: U_2 = \frac{1}{r_2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta)\Big|_{r=r_2} \Rightarrow U_2 = \frac{1}{r_2} \cdot \left(\frac{(r_3 v_{\theta_3}) - (r_1 v_{\theta_1})}{2\Delta r}\right)$$

$$i=3: U_3 = \frac{1}{r_3} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta)\Big|_{r=r_3} \Rightarrow U_3 = \frac{1}{r_3}\left(\frac{(r_4 v_{\theta_4}) - (r_2 v_{\theta_2})}{2\Delta r}\right)$$

<u>Nota</u>: Vean que el Término $r v_\theta$ se debe evaluar en cada punto respectivo $r_j v_{\theta_j}$

Entonces los únicos incognitos que quedan son los v_{θ_j}, que es lo que se pide calcular al principio.

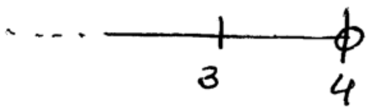
Nos queda determinar las expresiones para U_0 y U_4.

$i = 0$:  $U_0 = \frac{1}{r_0}\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta)\Big|_{r=r_0}$

Aquí no podemos usar la Fórmula de Diferencias Finitas Centradas, porque no hay más puntos a la izquierda. Debemos usar una Expresión hacia Delante. Por Simplicidad se usará la de Un Punto Adelante, pero si se quiere mejorar la Exactitud de los cálculos, se puede usar la fórmula de Dos Puntos Adelante.

$$U_0 = \frac{1}{r_0}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta)\Big|_{r=r_0} = \frac{1}{r_0}\cdot\left(\frac{(r_1 v_{\theta 1}) - (r_0 v_{\theta 0})}{\Delta r}\right)$$

Ojo: No va el 2.

$i = 4$:  $U_4 = \frac{1}{r_4}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta)\Big|_{r=r_4}$

$$U_4 = \frac{1}{r_4}\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta)\Big|_{r=r_4} = \frac{1}{r_4}\cdot\left(\frac{(r_4 v_{\theta 4}) - (r_3 v_{\theta 3})}{\Delta r}\right)$$

Para este caso, usamos Diferencias Finitas hacia Atrás.

Bien, ya se tienen las Definiciones desde U_0 hasta U_4, Ahora hay que sustituirlas en las Tres Ecuaciones en función de U. (pag. 3) de los Nodos Internos a partir de la ED.

Teníamos ya las Ecuaciones:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2\Delta r} u_0 + \dfrac{1}{2\Delta r} u_2 = 0 & \text{para } i=1 \\[2ex] -\dfrac{1}{2\Delta r} u_1 + \dfrac{1}{2\Delta r} u_3 = 0 & \text{para } i=2 \\[2ex] -\dfrac{1}{2\Delta r} u_2 + \dfrac{1}{2\Delta r} u_4 = 0 & \text{para } i=3 \end{cases}$$

Ahora sustituimos las Definiciones halladas de u_j.

$$\begin{cases} \left(\dfrac{-1}{2\Delta r}\right) \cdot \dfrac{1}{r_0} \cdot \left(\dfrac{(r_1 v_{\theta_1}) - (r_0 v_{\theta_0})}{\Delta r}\right) + \left(\dfrac{1}{2\Delta r}\right) \cdot \dfrac{1}{r_2} \cdot \left(\dfrac{(r_3 v_{\theta_3}) - (r_1 v_{\theta_1})}{2\Delta r}\right) = 0 \\[3ex] \left(\dfrac{-1}{2\Delta r}\right) \dfrac{1}{r_1} \cdot \left(\dfrac{(r_2 v_{\theta_2}) - (r_0 v_{\theta_0})}{2\Delta r}\right) + \left(\dfrac{1}{2\Delta r}\right) \dfrac{1}{r_3} \cdot \left(\dfrac{(r_4 v_{\theta_4}) - (r_2 v_{\theta_2})}{2\Delta r}\right) = 0 \\[3ex] \left(\dfrac{-1}{2\Delta r}\right) \cdot \dfrac{1}{r_2} \cdot \left(\dfrac{(r_3 v_{\theta_3}) - (r_1 v_{\theta_1})}{2\Delta r}\right) + \left(\dfrac{1}{2\Delta r}\right) \cdot \dfrac{1}{r_4} \left(\dfrac{(r_4 v_{\theta_4}) - (r_3 v_{\theta_3})}{\Delta r}\right) = 0 \end{cases}$$

Ahora se Reordenan y reagrupan términos:

$$\left(\frac{\cancel{r_0}}{2\Delta r^2 \cdot \cancel{r_0}}\right) v_{\theta_0} + \left(\frac{-r_1}{2\Delta r^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{2r_2}\right) \cdot v_{\theta_1} + 0\, v_{\theta_2} + \left(\frac{r_3}{4\Delta r^2 \cdot r_2}\right) v_{\theta_3} = 0$$

$$\left(\frac{r_0}{4\Delta r^2 \cdot r_1}\right) v_{\theta_0} + 0\, v_{\theta_1} + \left(\frac{-r_2}{4\Delta r^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3}\right) v_{\theta_2} + 0\, v_{\theta_3} + \left(\frac{r_4}{4\Delta r^2 r_3}\right) \cdot v_{\theta_4} = 0$$

$$\left(\frac{r_1}{4\Delta r^2 \cdot r_2}\right) v_{\theta_1} + 0\, v_{\theta_2} + \left(\frac{-r_3}{2\Delta r^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot r_2} + \frac{1}{r_4}\right) v_{\theta_3} + \left(\frac{\cancel{r_4}}{2\Delta r^2 \cancel{r_4}}\right) v_{\theta_4} = 0$$

Estas son las Ecuaciones Finales de los Nodos Internos.
Faltan las Fronteras.

Frontera Izquerda:

$i=0\ ;\ r=R_1\ ;\ \boxed{V_{\theta_0}=0}$ Dato del Problema.

Frontera Derecha:

$i=4\ ;\ r=R_2\ ;\ \boxed{V_{\theta_4}=\omega R_2}$ $\omega . R_2 = 300\ \frac{cm}{sg}$

Ya se tienen los 5 ecuaciones del sistema, ahora solo queda evaluar los términos:

i	0	1	2	3	4
r_i	1	1,5	2	2,5	3

; $\Delta r = 0,5.$

Para los Nodos Internos:

$$\begin{cases} 2V_{\theta_0} + (-3,75)V_{\theta_1} + 0 . V_{\theta_2} + 1,25 . V_{\theta_3} = 0 \\ 0,6667 . V_{\theta_0} + 0\,V_{\theta_1} + (-2,1333)\,V_{\theta_2} + 0\,V_{\theta_3} + 1,2\,V_{\theta_4} = 0 \\ 0\,V_{\theta_0} + 0,75V_{\theta_1} + 0 V_{\theta_2} + (-3,916667)\,V_{\theta_3} + 2\,V_{\theta_4} = 0 \end{cases}$$

Ahora se arma el Sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3,75 & 0 & 1,25 & 0 \\ 0,6667 & 0 & -2,1333 & 0 & 1,2 \\ 0 & 0,75 & 0 & -3,91667 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_{\theta_0} \\ V_{\theta_1} \\ V_{\theta_2} \\ V_{\theta_3} \\ V_{\theta_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Ahora solo queda Resolverlo:

Cualquier método sirve para este sistema:
Por calculadora:

i	0	1	2	3	4
V_θ	0	74,99	168,75	224,99	300

La parte más difícil del Problema es escribir correctamente las ecuaciones y agrupar correctamente los términos para poder colocarlos correctamente en la matriz.

FIN.